

Théorème de Sard

Théorème : (de Sard)

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe C^1 . Notons $C = \{x \in U, \operatorname{rg}(df_x) < m\}$ l'ensemble des points critiques de f , alors $\mu(f(C)) = 0$ avec μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^m$.

Lemme:

Si f est de classe C^1 sur U , pour tout compact convexe $K \subset U$ et $\delta > 0$, il existe une fonction $\lambda: [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que:
 $\|f(y) - f(x) - df_x(y-x)\| \leq \lambda(\|x-y\|) \|x-y\|$, avec $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = 0$
 pour tout les points $x, y \in K$ tels que $\|x-y\| \leq \delta$.

Preuve (Lemme):

Soient $x, y \in K$ tels que $\|x-y\| \leq \delta$, on a:

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df_{x+t(y-x)} dt$$

En effet, définissons $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 , on a

$$t \mapsto f(x+t(y-x))$$

que $g(0) = f(x)$ et $g(1) = f(y)$, de plus la dérivée de g s'exprime par la règle de la chaîne: $g'(t) = df_{x+t(y-x)}(y-x)$

Ainsi on a notre égalité par le théorème fondamental de l'analyse. Définissons une application $\lambda: [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}^+$ l'uniforme continuité de df sur K compact, comme que $\lambda(t) \rightarrow 0$ $t \rightarrow 0$.
 $t \mapsto \sup_{\substack{x, y \in K \\ \|x-y\| \leq t}} \|df_x - df_y\|$

$$\begin{aligned} \text{On a: } & \|f(y) - f(x) - df_x(y-x)\| \\ &= \left\| \int_0^1 (df_{x+t(y-x)} - df_x)(y-x) dt \right\| \quad (\text{on intègre sur un ensemble de mesure égale à 1}) \\ &\leq \int_0^1 \|df_{x+t(y-x)} - df_x\| \|y-x\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|df_{x+t(y-x)} - df_x\| \|y-x\| dt \leq \lambda(\delta) \times \delta \quad \square \end{aligned}$$

Preuve (théorème):

Soit K un cube compact contenu dans V , il suffit de montrer que $\mu(f(C \cap V)) = 0$. En effet, on peut recouvrir

(voir compléments) V par une suite dénombrable de compacts que l'on note $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Mais alors, $C = C \cap V = C \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C \cap K_i$ et donc
 $f(C) = f\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} C \cap K_i\right) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f(C \cap K_i)$, finalement $\mu(f(C)) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(f(C \cap K_i))$.

Notons $M = \sup_{x \in K} \|df_x\|$ il est atteint car f est $\mathcal{C}^1$. Pour $x \in C \cap K$, on a que $J_m(f_x)$ est contenu dans un hyperplan H_x de $\mathbb{R}^n$.

Prenons dans H_x l'hyperplan affine passant par $f(x)$ et de direction H_x , il contient en particulier l'espace affine passant par $f(x)$ et de direction $J_m(f_x)$.

Découpons K en k^n cubes compacts, tous de côtés $\frac{r}{k}$ (avec r le côté de K), que l'on note $K_1, \dots, K_m$ et le diamètre de chaque K_i est donc $\sqrt{n} \frac{r}{k}$. Par le même argument que précédemment on a que $\mu(f(C \cap K)) \leq \sum_{i=1}^m \mu(f(C \cap K_i))$. Si $C \cap K_i = \emptyset$ alors évidemment on a $\mu(f(C \cap K_i)) = 0$, sinon soit $x \in C \cap K_i$ et $y \in K_i$.

On a les deux inégalités suivantes:

- $\|f(y) - f(x)\| \leq M \|x - y\| \leq M \sqrt{n} \frac{r}{k}$ (car $K_i \subset K$ et $\|df\| \leq M$ car un cube est convexe)

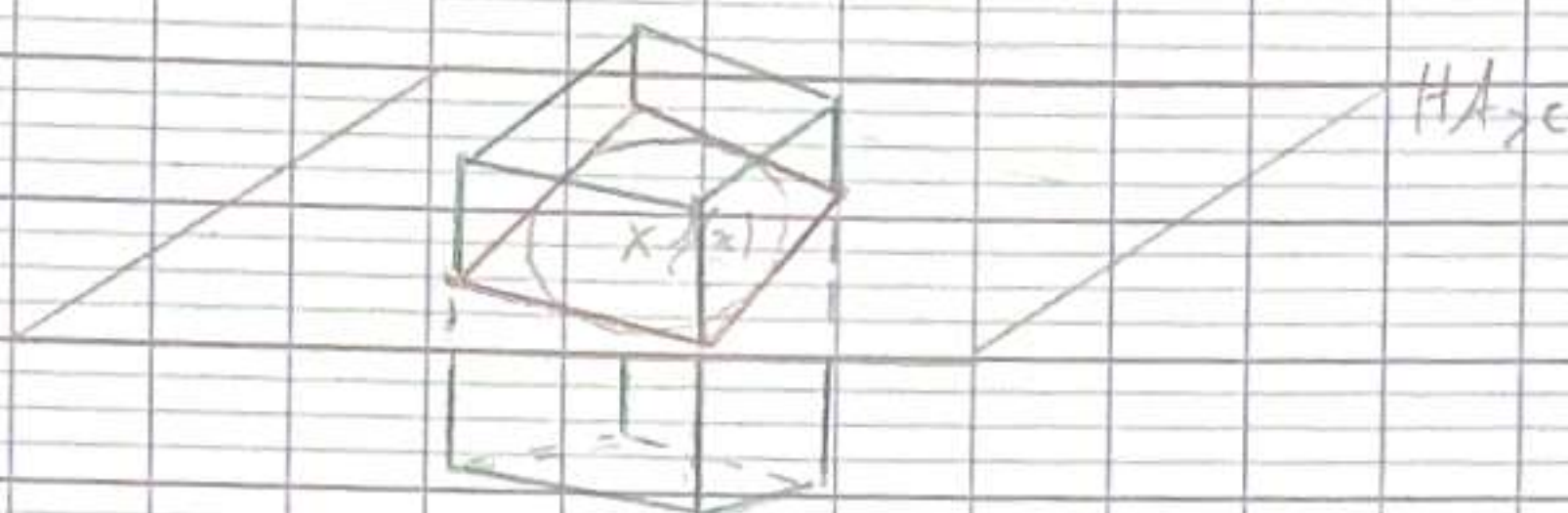
- $d(f(y), H_x) \leq \lambda(\|x - y\|) \|x - y\| \leq \lambda(\sqrt{n} \frac{r}{k}) \sqrt{n} \frac{r}{k}$ (par le lemme car $f(x) + d_{f_x}(y - x) \in H_x$).

Par la première inégalité on voit que $f(K_i) \subset B(f(x), M \sqrt{n} \frac{r}{k})$
 $\subset \text{Hypercube}(f(x), 2M \sqrt{n} \frac{r}{k})$

La seconde nous dit que l'on est à distance $\lambda(\sqrt{n} \frac{r}{k}) \sqrt{n} \frac{r}{k}$ de l'hyperplan affine H_x .

Les deux conditions entraînent ensemble que $f(K_i)$ est contenu dans un hyperrectangle de base $H_x \cap \text{Hypercube}(f(x), 2M \sqrt{n} \frac{r}{k})$

et de hauteur $2 \lambda(\sqrt[n]{\frac{r}{h}}) \sqrt[n]{\frac{r}{h}}$ (cf. dessin).



Mais alors on a sur les volumes :

$$\begin{aligned} \mu(f(C \cap K)) &\leq \mu(f(K)) \leq \left(2 \lambda(\sqrt[n]{\frac{r}{h}}) \sqrt[n]{\frac{r}{h}} \right) \times 2^{n-1} M^{n-1} \sqrt[n]{\frac{r}{h}}^{n-1} \frac{r^{n-1}}{h^{n-1}} \\ &\leq \lambda(\sqrt[n]{\frac{r}{h}}) \times 2^n M^{n-1} \sqrt[n]{\frac{r}{h}}^n \frac{r^n}{h^n} \quad \text{(indépendant de } c) \end{aligned}$$

Mais alors en sommant sur les h^n cubes :

$$\mu(f(C \cap K)) \leq \lambda(\sqrt[n]{\frac{r}{h}}) \times 2^n M^{n-1} \sqrt[n]{\frac{r}{h}}^n h^n = \lambda(\sqrt[n]{\frac{r}{h}}) \times (C_{M,n,r})$$

La quantité à droite tend vers 0 lorsque $h \rightarrow +\infty$, le résultat suit. $\square$

Compléments :

Un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une union dénombrable de cubes compacts :

Soit $x \in U$ alors il existe une boule B_x telle que $B_x \subset U$.

Choisissons un cube compact G_x à coordonnées rationnelles tel que $x \in G_x \subset B_x \subset U$ (densité des rationnels). Mais alors

$U = \bigcup_{x \in U} G_x$ qui est une union dénombrable car on a pris des cubes à coordonnées rationnelles.

Remarque : Si on a $U \subset \mathbb{R}^m$ et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , alors le cas un cas est facile. En effet, dans ce cas tous les points sont réguliers et on pose $g: U \times \mathbb{R}^{m-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est C^1 alors elle transforme un ensemble de mesure nulle en un ensemble de mesure nulle, l'où $f(C) = f(U) = g(U \times \{0\}^m)$ est de mesure nulle car $U \times \{0\}^m$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^m$ (on peut le

Voir par la mesure produit. On a utilisé le résultat suivant:

Lemme: Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ ouvert et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 , l'image par f d'un ensemble de mesure nulle est de mesure nulle.

Preuve: Voir [LAF] p. 38

Le cas $m > n$ est nettement plus difficile, on le montre généralement avec l'hypothèse que f est C^∞ mais il suffit que f soit de classe C^k avec $k \geq \max(1, m-n+1)$.

Utilisation: Le théorème de Sard nous garantit que l'ensemble des valeurs régulières de f est dense dans $\mathbb{R}^n$, ceci nous permet de définir le degré topologique pour les applications de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ qui est un invariant d'homotopie.

Cette notion de degré topologique peut notamment être utilisée pour démontrer le théorème du point fixe de Brouwer. Dernièrement, le théorème de Sard intervient dans la preuve de Kuiper (1998) du théorème d'invariance du domaine.

Ce théorème est un des résultats fondamentaux de la topologie différentielle.